Chapitre 6

Polynômes d'endomorphismes

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

5.1 Définition

On remplace X^k par u^k (ou A^k) et 1 par Id_E (ou I_n).
Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + ... \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. On pose :

$$P(u) := a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 u + a_2 u^2 + ... \text{ et } P(A) := a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + ...$$

Proposition 5.1.1 *L'application :*

$$\mathbb{K}[X] \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \, , \, P(X) \mapsto P(A)$$

est un morphisme d'algèbres i.e. *: c'est linéaire et :*

$$^\forall P, Q \in \mathbb{K}[X] \, , \, (PQ)(A) = P(A)Q(A)$$

de même l'application :

$$\mathbb{K}[X] \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E) \, , \, P(X) \mapsto P(u)$$

est aussi un morphisme d'algèbres.

Démonstration : Si $P(X) = a_0 + a_1 X + ...$ et $Q(X) = b_0 + b_1 X + ...$, alors $PQ(X) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)X + ...$ Donc :

$$(PQ)(A) = a_0 b_0 I_n + (a_0 b_1 + a_1 b_0)A + ...$$

$$= (a_0 I_n + a_1 A + ...)(b_0 I_n + b_1 A + ...)$$

$$= P(A)Q(A) \ .$$

q.e.d.

Remarque : [importante] En particulier, pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, les matrices $P(A)$ et $Q(A)$ commutent :

$$P(A)Q(A) = Q(A)P(A)$$

de même les endomorphismes $P(u)$ et $Q(u)$ commutent.

EXEMPLE : — **Polynôme d'une diagonale :**

$$D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

on a :

$$P(D) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

pour tout polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$.

— **polynôme et conjugaison :** Si Q est inversible, si $A = QA'Q^{-1}$, alors pour tout polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$, $P(A) = QP(A')Q^{-1}$.

Exercice 39 *Montrer que plus généralement, pour une matrice triangulaire :*

$$T := \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \vdots \\ & \ddots & \vdots \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

on a :

$$P(T) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & \cdots & \vdots \\ & \ddots & \vdots \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

pour tout polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ (les coefficients hors de la diagonale peuvent avoir une expression compliquée mais les coefficients diagonaux sont obtenus simplement en leur appliquant le polynôme P).

5.2 Théorème de Cayley-Hamilton

Définition 47 *On dit qu'un polynôme $P(X)$ est un polynôme annulateur de la matrice A ou de l'endomorphisme u si $P(A) = 0$, ou si $P(u) = 0$.*

Exemple : — Si $p : E \to E$ est une projection, $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de p car $p^2 = p$.

— Si $r : E \to E$ est une réflexion, $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de r car $r^2 = \mathrm{Id}_E$.

Où chercher les valeurs propres, connaissant un polynôme annulateur mais ne connaissant pas le polynôme caractéristique ?

Proposition 5.2.1 *Si P est un polynôme annulateur de u, respectivement de A, alors :*

$$\mathrm{Sp}(u) \subseteq \{ \text{ racines de } P \ \}$$

respectivement

$$\mathrm{Sp}(A) \subseteq \{ \text{ racines de } P \ \} \ .$$

Démonstration : Si x est un vecteur propre de u associé à une valeur propre λ, alors :

$$u(x) = \lambda x \Rightarrow {}^{\forall} k \geq 0 \, , u^k(x) = \lambda^k x$$

et plus généralement :

$$Q(u)(x) = Q(\lambda)x$$

pour tout polynôme $Q(X)$. En particulier : $P(u)(x) = 0 \Rightarrow P(\lambda)x = 0 \Rightarrow P(\lambda) = 0$ car $x \neq 0$. <u>*q.e.d.*</u>

Théorème 5.2.2 (de Cayley-Hamilton) *Si E est de dimension finie,*

$$\chi_u(u) = 0$$

de même $\chi_A(A) = 0$.

Exemple : — Si :

$$N := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \\ & & & & 1 \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix} \text{ et } J := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \ ,$$

alors : $\chi_N(X) = X^n$ et $\chi_J(X) = X^n - 1$ et on a bien $N^n = 0$ et $J^n = I_n$.

Démonstration (s) du théorème :

1ère démonstration (algébrique) :

Notons $B(X) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}[X])$ la transposée de la comatrice de $XI_n - A$. Tous les coefficients de la matrice $B(X)$ sont des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré $\leq n-1$. Il existe donc des matrices :

$$B_0, ..., B_{n-1} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

telles que :

$$B(X) = B_0 + XB_1 + ... + X^{n-1}B_{n-1} \ .$$

On a alors :

$$B(X)(XI_n - A) = \text{dét}\,(XI_n - A)I_n$$

$$\Leftrightarrow (B_0 + XB_1 + ... + X^{n-1}B_{n-1})(XI_n - A) = \chi_A(X)I_n$$

(on développe la partie gauche)

$$\Leftrightarrow -B_0A + X(B_0 - B_1A) + X^2(B_1 - B_2A) + ... + X^{n-1}(B_{n-2} - B_{n-1}A) + X^nB_{n-1}$$

$$= \chi_A(X)I_n \tag{5.1}$$

Notons $c_0, ..., c_n \in \mathbb{K}$ les coefficients du polynôme caractéristique :

$$\chi_A(X) = c_0 + ... + c_nX^n$$

$(c_0 = \pm\text{dét}\,A, c_n = 1)$ On a donc d'après (5.1) :

$$-B_0A = c_0I_n$$

$$B_0 - B_1A = c_1I_n$$

$$...$$

$$B_{n-1} = c_nI_n$$

et donc :

$$\chi_A(A) = c_0I_n + c_1A + ... + c_nA^n$$

$$= -B_0A + (B_0 - B_1A)A + (B_1 - B_2A)A^2 + ... + (B_{n-2}A^{n-1} - B_{n-1})A^{n-1} + B_{n-1}A^n$$

$$= 0$$

car « tout se simplifie » .

5.3 Polynômes annulateurs

Un *polynôme annulateur* d'un endomorphisme u de E est un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$. Par exemple, en dimension finie : $\chi_u(X)$. Un *polynôme minimal* de u est un polynôme annulateur de u, non nul, de degré minimal.

Exemple : Des polynômes minimaux des matrices :

$$O, I_n, N := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \\ & & & & 1 \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),$$

sont respectivement : $X, X-1, X^n$.

Rappels sur la division euclidienne :

Soient P, Q deux polynômes dans $\mathbb{K}[X]$. Si $Q \neq 0$, alors il existe un unique couple (B, R) tels que :

$$B, R \in \mathbb{K}[X],\ P = BQ + R \text{ et } \deg R < \deg Q$$

(R peut éventuellement être nul).

Démonstration : **Unicité :** si $B_0Q + R_0 = B_1Q + R_1 = P$ et $\deg R_{0,1} < \deg Q$, alors $R_0 - R_1 = (B_0 - B_1)Q$ et $\deg(R_0 - R_1) < \deg Q$; donc forcément, $R_0 - R_1 = 0$ et $R_0 = R_1 \Rightarrow B_0 = B_1$.

Existence : On raisonne par récurrence sur le degré de P. Si $\deg P < \deg Q$, il suffit de choisir $B = 0$ et $R = P$. Sinon :

$$P = a_0 + ... + a_pX^p,\ Q = b_0 + ... + b_qX^q$$

avec $a_i, b_j \in \mathbb{K}$, $a_p, b_q \neq 0$, $p \geq q$.Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence au polynôme

$$P - \frac{a_p}{b_q}X^{p-q}Q$$

dont le degré est $< \deg P$. *q.e.d.*

*

Proposition 5.3.1 *Soit $m_u(X)$ un polynôme minimal de u. Alors, m_u* divise tous les polynômes annulateurs de *u.*

Démonstration : Si $P(u) = 0$, on fait la division euclidienne de P par m_u :

$$P = Bm_u + R$$

où $\deg R < \deg m_u$. On a :

$$0 = P(u) = \underbrace{B(u)m_u(u)}_{=0} + R(u) \Rightarrow R(u) = 0$$

et $R(X)$ est un polynôme annulateur de u de degré $< \deg m_u$. Forcément, $R = 0$ et $m_u(X) divise P(X)$. <u>*q.e.d.*</u>

Il existe donc au plus un *unique* polynôme minimal *unitaire* (*i.e.* son coefficient de plus haut degré vaut 1) de u (*exo*) c'est LE polynôme minimal de u.

Remarque : Si E est de dimension finie, $\chi_u(X)$ est un polynôme annulateur de u (non nul) donc dans ce cas, le polynôme minimal existe toujours de plus :

$$m_u(X) \text{ divise } \chi_u(X)$$

dans $\mathbb{K}[X]$.

On définit de même les polynômes annulateurs et le polynôme minimal d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 40 *Si E est de dimension finie, le polynôme minimal de u coïncide avec le polynôme minimal de sa matrice dans n'importe quelle base de E.*

Proposition 5.3.2 *Soit P un polynôme annulateur de u un endomorphisme de E. Alors, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $P(\lambda) = 0$. En particulier si le polynôme minimal m_u existe, $m_u(\lambda) = 0$ pour toute valeur propre λ de u.*

Démonstration : Si $u(x) = \lambda x$, $0 \neq x \in E$. Alors, $0 = P(u)(x) = P(\lambda)x \Rightarrow P(\lambda) = 0$. <u>*q.e.d.*</u>

Proposition 5.3.3 *Les racines de $m_u(X)$ sont exactement les valeurs propres de u c-à-d (si $m_u(X)$ existe) :*

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad m_u(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \mathrm{Sp}(u) \ .$$

Démonstration : Il suffit de démontrer que si $m_u(\lambda) = 0$, alors λ est une valeur propre de u. Or dans ce cas, $m_u(X) = (X - \lambda)Q(X)$ pour un certain polynôme $Q(X)$ de degré $< \deg m_u(X)$. Donc :

$$0 = m_u(u) = (u - \lambda \mathrm{Id}_E)Q(u) \ .$$

Forcément $Q(u) \neq 0$ par minimalité de m_u. Donc $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injective et donc λ est une valeur propre de u. *q.e.d.*

Comment trouver le polynôme minimal d'une matrice ?

Théorème 5.3.4 *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que le polynôme caractéristique est scindé :*

$$\chi_A(X) = (X - \lambda_1)^{m_1} ... (X - \lambda_r)^{m_r}$$

où $m_1, ..., m_r \geq 1$, $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{K}$, sont deux à deux distincts. Alors :

$$m_A(X) = (X - \lambda_1)^{k_1} ... (X - \lambda_r)^{k_r}$$

pour certains entiers : $1 \leq k_i \leq m_i$, $i = 1, ..., r$.

Démonstration : On note $k_1, ..., k_r$ les multiplicités de $m_A(X)$ en les valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_r$. On a déjà vu que $1 \leq k_i$ car $m_A(\lambda_i) = 0$. On a aussi $k_i \leq m_i$, la multiplicité de λ_i dans $\chi_A(X)$. Il reste donc à démontrer le lemme suivant :

Lemme 5.3.5 *On suppose que le polynôme $P(X)$ divise le produit*

$$(X - \lambda_1)^{m_1} ... (X - \lambda_r)^{m_r}$$

dans $\mathbb{K}[X]$ pour certains $\lambda_i \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et certains entiers $m_i \geq 1$. Alors si on note $k_1, ..., k_r$ les multiplicités respectives des $\lambda_1, ..., \lambda_r$ dans $P(X)$, on a :

$$P(X) = a_d (X - \lambda_1)^{k_1} ... (X - \lambda_r)^{k_r}$$

où a_d est le coefficient dominant de P.

Démonstration du lemme : On peut supposer P unitaire *i.e.* $a_d = 1$. On raisonne par récurrence sur $r \geq 0$. Si $r = 0$, il n'y a rien à montrer. Notons $Q(X) \in \mathbb{K}[X]$ le quotient par $P(X)$:

$$(X - \lambda_1)^{m_1} ... (X - \lambda_r)^{m_r} = P(X) Q(X) \ .$$

La multiplicité de λ_1 dans $Q(X)$ est : $m_1 - k_1$. Donc :

$$P(X) = (X - \lambda_1)^{k_1} \widetilde{P}(X) \text{ et } Q(X) = (X - \lambda_1)^{m_1 - k_1} \widetilde{Q}(X)$$

d'où :

$$(X - \lambda_1)^{m_1} ... (X - \lambda_r)^{m_r} = (X - \lambda_1)^{m_1} \widetilde{P}(X) \widetilde{Q}(X)$$

$$\Leftrightarrow (X-\lambda_1)^{m_2}...(X-\lambda_r)^{m_r} = \widetilde{P}(X)\widetilde{Q}(X)$$

et on applique l'hypothèse de récurrence.

q.e.d.

Remarque : Un cas particulier important à retenir : les diviseurs unitaires de $(X-\lambda)^n$ sont les $(X-\lambda)^d$ avec $0 \le d \le n$ (pour tous $n \ge 0, \lambda \in \mathbb{K}$).

q.e.d.

Exercice 41

A	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\chi_A(X)$	X^4	X^4	X^4
$m_A(X)$	X^2	X^3	X^4

Exercice 42 (Polynôme minimal d'une diagonale) *Soit*

$$D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

alors $m_D(X) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(D)}(X-\lambda)$ *où* $\mathrm{Sp}(D) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ *et les valeurs propres sont comptées sans multiplicité.*

Nouveau critère de diagonalisabilité

On dit qu'un polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ est *scindé à racines simples dans* $\mathbb{K}$ s'il se factorise en :

$$P(X) = a_d(X-\lambda_1)...(X-\lambda_r)$$

où $0 \neq a_d \in \mathbb{K}$ et $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{K}$ sont deux à deux distincts.

Théorème 5.3.6 *Une matrice* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *est diagonalisable sur* $\mathbb{K}$ *si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples sur* $\mathbb{K}$.

Démonstration : $\Rightarrow$: Si A est diagonalisable, A est semblable à une diagonale. Or deux matrices semblables ont le même polynôme minimal (*exo*)